Sesión sobre Teoría de Números

José Manuel Sánchez Cuadrado

08/11/2019

Ejercicio 1. (2008) Probar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es un múltiplo de 7.

Demostración. Reducir a módulo 7 y aplicar el pequeño Teorema de Fermat. $\square$

Ejercicio 2. (2008) Probar que para todo entero positivo n, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

Demostración. Escribiendolo como $n^7(n^{12} - 1)$ es fácil ver que $2, 3$ y 5 dividen a ese número reduciendo a módulo y aplicando el pequeño Teorema de Fermat. $\square$

Ejercicio 3. (2010) Hallar todos los números naturales n que verifican la condición:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = n + 335,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.

Demostración. Diferenciar los casos $n = 6k, 6k + 1, \ldots, 6k + 5$. $\square$

Ejercicio 4. (2012) Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5.

Demostración. Se tiene que $16 \equiv 2 \mod 7$, por lo que el problema es equivalente a ver cuando $2^r - 2^s \equiv 5 \mod 7$. Si calculamos 2^k vemos que 2^k es congruente con $1, 2, 4$ en módulo 7 si k es congruente con $0, 1, 2$ en módulo 3. Por ello, -2^k es congruente con $6, 5, 3$ en módulo 7. Por ello la única posibilidad de que la suma de 2^r y -2^s sea equivalente a 5 es que $2^r \equiv 2$ y $-2^s \equiv 3$. Por tanto tiene que ser $r = 3k_1 + 1$ y $s = 3k_2 + 2$. (También habría que ver para que $n > 0$). □

Ejercicio 5. (2013) Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$y^k = x^2 + x$$

donde k es un número entero mayor que 1.

Demostración. Como x y $x+1$ son siempre coprimos jamás su producto podrá ser una potencia $k-$ésima mayor que 1, por tanto las únicas soluciones son las triviales $(0, 0), (-1, 0)$. □

Ejercicio 6. (2011) Calcula todos los números enteros a, b, c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

Demostración. Veamos que no existen más soluciones que la solución trivial. Si (a, b, c) es una solución no trivial, procedemos a reducir a módulo 3 la ecuación para obtener

$$a^2 \equiv 2b^2 \mod 3.$$

De aquí se deduce que $a \equiv 0 \equiv b$, por tanto a^2 y b^2 son múltiplos de 9. Por ello, se tiene que $3c^2$ es un múltiplo de 9, y por tanto c es múltiplo de 3 pues c^2 es múltiplo de 9. Por tanto, podemos considerar, se tendría que $(a/3, b/3, c/3)$ también es solución de la ecuación, pero podemos repetir este proceso de nuevo indefinidamente, lo cual no es posible y por tanto la única solución es la trivial. □

Ejercicio 7. (2014) Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

Demostración. Supongamos que (x, y) es una solución entera no trivial. Si reducimos a módulo 3, la única posibilidad es que $x \equiv 0 \equiv y \mod 3$, ya que el miembro derecho siempre lo es y en otro caso no se puede dar la igualdad.

Entonces pasa que $x = 3\alpha$ e $y = 3\beta$, pero si susutituyendo en la ecuación, al ser homogénea obtenemos que

$$\alpha^4 + \beta^4 = 3\alpha^3\beta,$$

por lo que (α, β) también es solución. Como podemos repetir este proceso indefinidamente, y una puede haber una sucesión de soluciones de módulo estrictamente decreciente, la única solución posible es la trivial. $\square$

Ejercicio 8. (2006) Encontrar razonadamente dos números enteros positivos a y b, tales que:

- b^2 sea múltiplo de a.
- a^3 sea múltiplo de b^2.
- b^4 sea múltiplo de a^3.
- a^5 sea múltiplo de b^4.
- b^6 no sea un múltiplo de a^5.

Demostración. Probar con $a = \alpha q$ y $b = \alpha$ y deducir que condiciones tiene que cumplir q.

Otra forma es tomar $a = \alpha^n$ y $b = \alpha^m$. Ahora las condiciones del enunciado son equivalentes a

$$n \leq 2m \leq 3n \leq 4m \leq 5n > 6m.$$

Acotar con esto el valor n/m y escoger un racional factible. $\square$

Ejercicio 9. Probar que todo primo p distinto de 2 y 5 divide a un número n formado solamente por $''1''$ (en base 10). ¿Hay alguna relación entre p y el número de cifras de n?

Demostración. El enunciado es equivalente a ver que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p \left| \frac{10^m - 1}{9} \right. ,$$

es decir,

$$p | 9 \cdot \overbrace{(111\ldots)}^{m \text{ unos.}}.$$

De esto se deduce que $p|9$ ó $p|111\ldots$, entonces, si imponemos $(p,9)=1$, es decir, $p\neq 3$, entonces $p|111\ldots$, y como $111\ldots = (10^m-1)/9$, entonces $p|10^m-1$. Esto equivale a decir que

$$10^m \equiv 1 \mod p,$$

lo cual lo podemos garantizar tomando $m=p-1$ gracias al pequeño Teorema de Fermat. El caso $p=3$ es claro, pues $3|111$. $\square$